

ANÁLISE DE ESTRUTURAS PÉLO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Matheus Sanches dos Santos¹; Januário Pellegrino Neto²

¹Aluno de Iniciação Científica da Escola de Engenharia Mauá (EEM-CEUN-IMT);

² Professor da Escola de Engenharia Mauá (EEM-CEUN-IMT).

Resumo. *O presente trabalho tem como objetivo realizar estudos e análises de estruturas utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF). Por meio de modelos matemáticos e experimentais, o aluno terá uma melhor visão e compreensão do método e as diferenças que podem apresentar nos resultados dependendo principalmente do refinamento da malha utilizada. O software ANSYS Structural será a base de todo o estudo por permitir tanto análises lineares elásticas, como também análises não-lineares, dinâmicas e plásticas, aumentando as possibilidades de comparação com os experimentos a serem realizados. Um estudo teórico inicial será necessário para que se entenda e compreenda o funcionamento do método e os resultados que se apresentarão. Para isso, algumas rotinas em MATLAB serão implementadas para o entendimento de cada fase da análise pelo MEF. E com isso analisar e comparar com métodos consagrados, a eficiência da modelagem computacional em diversas etapas de um projeto e a sua facilidade de implementação para a melhor tradução dos problemas da engenharia atualmente.*

Introdução

Muitos fenômenos físicos nas diversas áreas da engenharia podem ser descritos em termos de derivadas diferenciais parciais. Normalmente, as soluções destas equações pelos métodos analíticos clássicos são muito extensas e trabalhosas ou até mesmo não se encontrou uma forma de resolvê-las representando aproximadamente o fenômeno em questão.

O método dos elementos finitos (MEF) é um método numérico para a solução destas equações diferenciais parciais de forma aproximada. A ideia principal do MEF é dividir um corpo em elementos finitos, conectados por nós, e obter uma solução aproximada para o problema analisado. Ao se dividir o corpo em elementos, estes são estudados um a um na intersecção dos nós, tornando a análise mais precisa e específica para pontos críticos ou com formatos e características diferentes do corpo em estudo.

Existem atualmente diversos *softwares* comerciais para a análise numérica pelo MEF, como o SAP2000, Strap, Abaqus, ANSYS, entre outros. É importante, do ponto de vista do usuário e engenheiro, entender o funcionamento por trás destes *softwares* para modelar o problema e interpretar corretamente os resultados fornecidos.

Diante desta realidade um estudo mais aprofundado sobre o método dos elementos finitos é de suma importante para um bom uso destas ferramentas. Para um melhor entendimento deste método, este projeto foi iniciado com um enfoque em análise matricial em elementos de barra, para estudar os comportamentos de uma estrutura, inicialmente plana, quando submetida a esforços nodais ou em sua extensão. Introduzindo o conceito de matriz de rigidez e eixos locais e globais de cada elemento e da estrutura como um todo.

Neste trabalho foram implementadas algumas rotinas em MATLAB para o entendimento de cada fase da análise pelo método de análise matricial em treliças e pórticos planos, desde a entrada de dados até a matriz de deslocamentos e esforços de cada barra e da estrutura como um todo. Este *software* em MATLAB será utilizado para comparações com análises práticas e outros métodos de resolução de estruturas e também como ferramenta didática no estudo de análise matricial e incentivo a alunos na área de modelagem computacional.

Para a análise em elementos finitos foi utilizado o ANSYS Structural, um *software* capaz de resolver problemas estruturais complexos, tanto análises lineares elásticas, como análises não-lineares, dinâmicas, entre outras.

Além da análise numérica, uma análise experimental se faz de grande valia, para que a compreensão do comportamento físico da estrutura na prática possa ser comparada com os dados obtidos na análise computacional, para avaliar se é necessário o refinamento da malha e da análise de seu modelo.

Materiais e Métodos

Nesta seção pretende-se demonstrar as características, funcionalidades e aplicações da rotina do *software* em MATLAB e das simulações feitas no *software* ANSYS Structural, bem como as teorias, métodos e fórmulas utilizados nos mesmos.

Linguagem

O *software* foi desenvolvido como uma rotina do *software* MATLAB utilizando a linguagem de programação do mesmo. Esta ferramenta foi escolhida pela sua facilidade de linguagem e operações matriciais e devido a sua simplicidade de compreensão para auxiliar em um enfoque mais didático em sala de aula ou a um futuro programador, podendo até mesmo ser implementada ou alterada facilmente.

O código programado sofreu diversas alterações e revisões com o objetivo de deixá-lo mais compacto e aumentar a sua velocidade de processamento. Cada etapa do processo descrito pelo código é comentada e organizada para melhor entendimento do usuário.

Teoria

Para a construção do *software*, foi utilizada a teoria de Análise Matricial apresentada em Teoria das Estruturas.

A análise matricial de estruturas propõe-se a determinar os deslocamentos, reações e esforços solicitantes de estruturas, tais como, vigas contínuas, pórticos e treliças planas, grelhas, modelando-os como um arranjo de elementos simples (barras) unidos através de nós, os quais ainda podem ter deslocamentos restritos por vínculos. Para a resolução por este método se faz importante o entendimento do conceito de rigidez (força necessária para um deslocamento unitário) e do conceito de sistemas locais e globais, no qual o primeiro consiste no sistema de eixos a partir do elemento, independentemente de sua posição no espaço, enquanto o segundo consiste na posição de um certo elemento em relação a um sistema de eixos fixos para toda a estrutura.

$$\begin{bmatrix} F_{\sim L} \\ F_{\sim B} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_{\sim L0} \\ F_{\sim B0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{-LL} & K_{-LB} \\ K_{-BL} & K_{-BB} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{\sim L} \\ U_{\sim B} \end{bmatrix} \quad - \text{ Cálculo dos esforços}$$

Estes deslocamentos, também chamados de graus de liberdade, também divididos em locais e globais, podem variar de quantidade e tipo de deslocamento de acordo com a característica da estrutura estudada.

Para que haja uma compatibilidade nas operações matriciais é necessário que todos os elementos que a compõe estejam no sistema global, para isso deve-se utilizar matrizes de rotação para auxiliar na adequação dos mesmos para o sistema global. O software desenvolvido busca otimizar as operações matriciais, muitas vezes trabalhosas e complicadas, para auxiliar

na resolução e entendimento de estruturas complexas como também incentivar o futuro usuário no estudo da análise matricial.

- Matriz de rigidez e matriz de rotação de uma treliça

$$[\bar{k}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 4} \quad [T] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha \\ 0 & 0 & -\operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

- Matriz de rigidez e matriz de rotação de um pórtico plano

$$[\bar{k}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} & 0 & \frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} \end{bmatrix}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entrada de Dados

A entrada de dados está em desenvolvimento e será utilizado o GiD, um *software* de pré e pós processamento, no qual terá uma interface detalhada e iterativa com o usuário. Na interface gráfica o usuário fornecerá dados como: área e formato da seção das barras, características do material, condição dos apoios, incidência de cada barra e disposição dos elementos na estrutura, o qual será feito por meio de nós inseridos por coordenadas construindo um modelo simplificado da estrutura com o apoio escolhido e suas respectivas incidências.

Desenvolvimento e estrutura de dados

No código em MATLAB, foram criadas matrizes para auxiliar na numeração e separação dos graus de liberdade livres e bloqueados, em cada um dos nós. Essas matrizes serão obtidas a partir da interação com o GiD. A matriz xyz é representada pelas coordenadas dadas pelo usuário e auxilia no cálculo dos comprimentos e dos ângulos de cada uma das barras da estrutura, parâmetros utilizados no preenchimento da matriz local de rigidez de cada elemento e da matriz de transformação do sistema de eixos local para o global respectivamente. A matriz conectividade mostra a incidência de cada uma das barras, que define a posição do sistema de eixos local de cada elemento. A matriz f fornece os esforços nodais em cada um dos graus de liberdade, responsáveis pelos deslocamentos e reações que serão calculadas no *software*, posteriormente o *software* será incrementado com a opção de cargas e carregamentos fora dos nós, aumentando a capacidade de resolução de problemas do programa desenvolvido.

Esta entrada de dados, fornecendo todos estes parâmetros, auxilia na discretização da estrutura, que consiste na numeração dos graus de liberdade começando pelos livres, tornando o preenchimento da matriz de rigidez global e suas subdivisões mais organizado e didático para o usuário e o código mais enxuto, melhorando a velocidade de processamento.

Como treliças e pórticos tem características distintas, após o término da discretização, é imposta uma condição avaliando em qual classe está a estrutura proposta para que se calcule corretamente as matrizes de rigidez locais e globais de cada barra, com seus valores e dimensões corretas. Ainda dentro da condição ocorre o espalhamento das matrizes para o preenchimento da matriz de rigidez global da estrutura, a qual possui a contribuição de rigidez de cada barra em cada um dos graus de liberdade. Realizado este espalhamento, é feito o cálculo dos deslocamentos nos graus de liberdade livres e das reações nos apoios da estrutura. O aplicativo fornece todas as matrizes utilizadas no processo de resolução e comentários em cada etapa para um melhor acompanhamento e entendimento do usuário.

Trecho do código-fonte em MATLAB para a construção das matrizes de rigidez global e local de acordo com a estrutura analisada.

```

if strcmp(tipoAnalise, 'trelica') == 1
    T = [cos(ALPHA) sin(ALPHA) 0 0;
          -sin(ALPHA) cos(ALPHA) 0 0;
          0 0 cos(ALPHA) sin(ALPHA);
          0 0 -sin(ALPHA) cos(ALPHA)];
    
    k_local(:,:,i) = [A(i) 0 -A(i) 0;
                      0 0 0 0;
                      -A(i) 0 A(i) 0;
                      0 0 0 0];
    
elseif strcmp(tipoAnalise, 'portico') == 1
    T = [cos(ALPHA) sin(ALPHA) 0 0 0 0;
          -sin(ALPHA) cos(ALPHA) 0 0 0 0;
          0 0 1 0 0 0;
          0 0 0 cos(ALPHA) sin(ALPHA) 0;
          0 0 0 -sin(ALPHA) cos(ALPHA) 0;
          0 0 0 0 0 1];
    
    k_local(:,:,i) =
        [A(i) 0 0 -A(i) 0 0;
         0 (12 * I(i) / L^2) (6 * I(i) / L) 0      -(12 * I(i) / L^2) (6 * I(i) / L);
         0 (6 * I(i) / L) (4 * I(i)) 0 -(6 * I(i) / L) (2 * I(i));
         -A(i) 0 0 A(i) 0 0;
         0 -(12 * I(i) / L^2) -(6 * I(i) / L) 0      (12 * I(i) / L^2) -(6 * I(i) / L);
         0 (6 * I(i) / L) (2 * I(i)) 0 -(6 * I(i) / L) (4 * I(i))];

end

k_local(:,:,i) = (E(i) / L) * k_local(:,:,i);
k_global(:,:,i) = T' * k_local(:,:,i) * T;

```

Saída de Dados

A saída de dados, assim como a entrada de dados no *software*, está em desenvolvimento e será feita também através de uma interface interativa no GiD. A interface contará com a sobreposição da deformada da estrutura estudada na estrutura inserida por coordenadas e fornecerá as reações de apoio e os valores dos esforços em cada nó dos elementos.

Modelagem no ANSYS e uso do método dos elementos finitos (MEF)

Para a análise pelo MEF foi estudado um pouco dos conceitos e da forma de refinar e construir uma análise coerente com o problema apresentado. Optou-se para uma análise mais prática e uma introdução ao uso do *software* ANSYS, estudando os recursos e ferramentas oferecidas pelo mesmo para a resolução de estruturas escolhidas pelo orientador.

Para a modelagem, foram feitos os esboços das estruturas apresentadas e utilizou-se as ferramentas de desenho do próprio ANSYS e também do *software* SolidWorks, este último pela sua facilidade e simplicidade em seus comandos para formas complexas (Figura 1), as quais foram inseridas no programa de análise por meio de exportação e compatibilização de arquivos.

As estruturas estudadas foram modeladas para otimização das dimensões de seções específicas para o desafio acadêmico de compósitos do SAMPE (Sociedade para o Avanço de Materiais e Engenharia de Processos), no qual foram modeladas estruturas com seções quadradas e perfis I feitas de fibra de carbono e fibra de vidro, ais quais posteriormente seriam utilizadas pela equipe da instituição no desafio acadêmico.

No *software* foram ensaiadas as condições da estrutura fornecidas pela competição como: espaçamento dos apoios, carga pontual aplicada, formato e condição dos apoios e da prensa que realiza o esforço, restrições de dimensão e características do material, coletadas mediante ensaios de tração e flexão realizados na própria instituição de ensino e pelo banco de dados de materiais do próprio ANSYS, refinando a malha em seções críticas para um melhor dimensionamento.

As estruturas foram confeccionadas e submetidas a ensaios destrutivos, estes dados obtidos pelos ensaios são fundamentais para uma comparação dos métodos utilizados com uma análise experimental. Apresentando uma melhora em modelagens futuras e estudos para um melhor resultado, os quais enriquecem e consolidam este projeto.

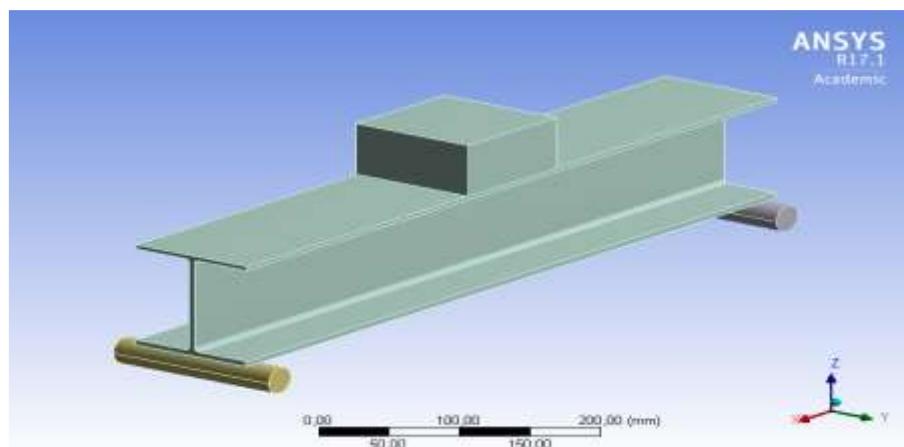


Figura 1 – Vista isométrica de uma viga bi apoiada

Resultados e Discussão

Nesta seção pretende-se demonstrar o retorno de dados gerados pelo *software*, as interpretações dos resultados fornecidos pelos modelos no ANSYS e discutir como o uso dos mesmos pode melhorar a análise e projetos de todas as áreas da engenharia.

Trecho do código-fonte para o espalhamento e preenchimento da matriz de rigidez global.

```
for i = 1:nElementos
    for j = 1:nNosPorElemento
        for k = 1:nGLPorNo
            GLLocal_i = k + (nGLPorNo * (j - 1));
            GLGlobal_i = GL(conectividade(i, j), k);

            for m = 1:nNosPorElemento
                for n = 1:nGLPorNo
                    GLLocal_j = n + (nGLPorNo * (m - 1));
                    GLGlobal_j = GL(conectividade(i, m), n);

                    K(GLGlobal_i, GLGlobal_j) = K(GLGlobal_i, GLGlobal_j) +
k_global(GLLocal_i, GLLocal_j, i);
                end
            end
        end
    end
end

K_int(:, :, i) = K;
end

U = K(GLLivos, GLLivos) \ f(GLLivos)
R = K(GLBloqueados, GLLivos) * U(GLLivos)
```

O espalhamento e o preenchimento da matriz de rigidez global são as etapas cruciais para os resultados dos procedimentos realizados no *software*, pois a matriz de rigidez será utilizada para o cálculo dos deslocamentos globais da estrutura, que servem de base para o cálculo dos outros parâmetros necessários para a sua resolução, como reações de apoio e posteriormente os esforços locais nas barras.

Para a comparação da eficiência do software, seus resultados foram comparados com resoluções analíticas resolvidas nos livros utilizados como referências do projeto, notas de aula e simulações no aplicativo de resolução de estruturas planas Ftool.

Como a interatividade com o usuário ou futuro programador é um dos principais aspectos deste projeto, assim como sua facilidade de compreensão e armazenamento de todas as matrizes utilizadas nas etapas do processo de resolução, pretende-se criar exemplos resolvidos de exercícios de estruturas planas, em parceria com outras faculdades de engenharia, utilizando-se o software em MATLAB como material complementar nos estudos de análise matricial a fim de entender as variadas situações que podem ocorrer nos casos estudados.

Na modelagem com o software ANSYS foi realizado um processo iterativo para o dimensionamento e otimização das estruturas. De acordo com as simulações geradas pelo software após a aplicação da carga e inserção do contato da viga com os apoios, foi-se testando diversas espessuras, levando em conta os resultados apresentados para cada seção estudada (Figura 2 e 3) e um conhecimento prévio de Resistência dos Materiais para um direcionamento nessa mudança de seção, para se alcançar um resultado otimizado.

Como as estruturas possuíam seções constantes em todo o seu comprimento, foi utilizado uma malha estruturada uniformemente, porém ao longo da modelagem estudou-se a confecção de furos ao longo da estrutura para a redução do peso da mesma (um dos requisitos da competição) sem alterar a sua resistência aos esforços impostos, devido a esta alternativa

usou-se o refinamento da malha no entorno dos furos para o estudo dessa possibilidade, a qual mostrou-se promissora e pode ser utilizada em futuras competições.

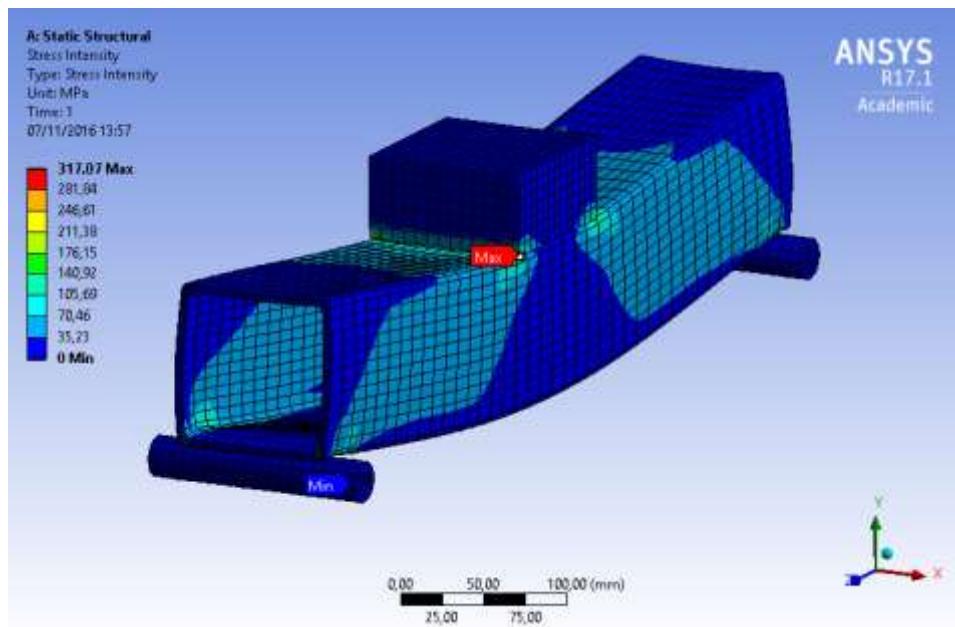


Figura 2 – Tensões normais ao longo da estrutura

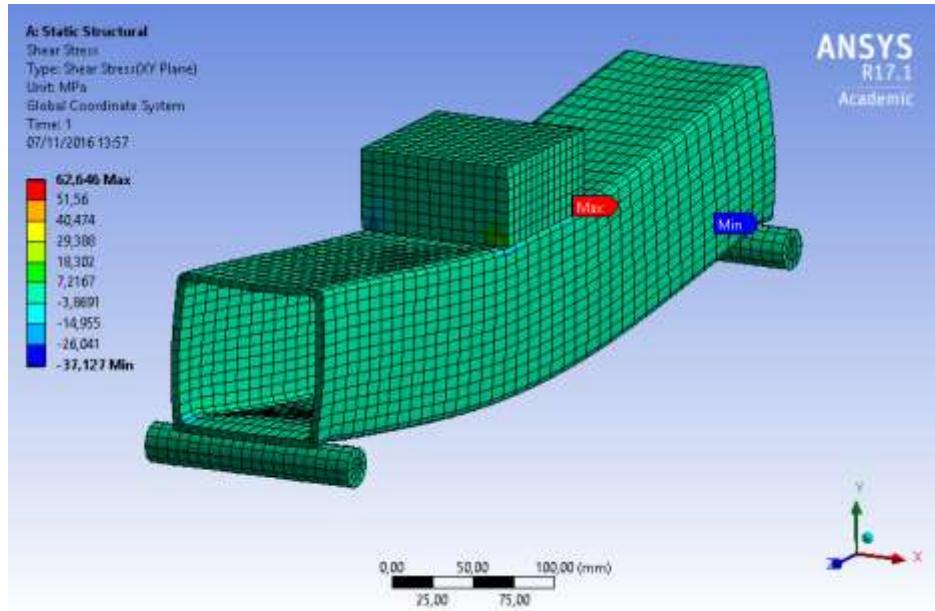


Figura 3 – Tensões de cisalhamento ao longo da estrutura

Utilizando-se o regulamento do desafio acadêmico foram geradas as simulações dos deslocamentos, pois havia um deslocamento vertical máximo permitido no vão da estrutura, e das tensões ao longo da viga, para avaliar se haveria ruptura do material inserido no modelo. Um coeficiente de segurança foi aplicado nos resultados, devido a defeitos na matéria-prima utilizada ou erros na confecção da estrutura, o que aproxima ainda mais a análise numérica da análise prática.

Os modelos confeccionados foram ensaiados e cumpriram com as especificações do desafio, resultando em uma vitória em uma das categorias inscritas.

Conclusões

Este projeto propôs a introdução a um método de análise de estruturas amplamente utilizado e reconhecido mundialmente, o método dos elementos finitos (MEF). Esta análise se deu início com o estudo da análise matricial, para um entendimento do comportamento da estrutura em diversas situações do cotidiano da engenharia. A análise matricial é a base para os estudos e introdução do MEF e se mostrou condizente com os resultados apresentados nos modelos computacionais e nos ensaios das estruturas confeccionadas.

Para o desenvolvimento e enriquecimento do projeto, introduziu-se o uso de softwares de modelagem e análise comerciais, ferramentas amplamente utilizadas no cotidiano do engenheiro. A interpretação correta dos resultados dessas simulações é dever do usuário e engenheiro para uma correta modelagem e otimização da estrutura, podendo ter diversos benéficos, como redução do tempo da obra, economia de material e estruturas mais eficientes, porém se utilizado sem o conhecimento de conceitos básicos de modelagem e funcionamento da estrutura podem levar a mesma a ruptura.

A modelagem computacional aliada ao MEF mostrou-se eficiente, comparando-se com diversos métodos tradicionais de resolução de estruturas, podendo ser cada vez mais implementado pelo usuário e dando certa liberdade e rapidez aos projetos de engenharia.

Este projeto mostrou a otimização não apenas das estruturas, mas também do tempo e de novas e inovadoras formas de resolução de problemas, que se torna um recurso cada vez mais explorado em harmonia com as técnicas tradicionais na formação de futuros engenheiros e na realização de grandes projetos.

Referências Bibliográficas

- [1] ANSYS® Academic Research, Release 17.2, Help System, Static Structural Analysis, ANSYS, Inc.
- [2] CHAPRA, Steven C. *Métodos numéricos aplicados com MATLAB para engenheiros e cientistas*, 3 ed. Porto Alegre: Amgh, 2013.
- [3] COOK, Robert D. *Finite element modelling for stress analysis*. Wiley: Whurr, 1995.
- [4] F., Avelino Alves. *Elementos finitos – A base da tecnologia CAE*, 6 ed. Editora Érica, 2013
- [5] FISH, Jacob; BELYTSCHKO, Ted. *Um primeiro curso em elementos finitos*, 1 ed. LTC, 2009