ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS NO MATLAB

Marcelo Cutrim Hirata [1]; Januário Pellegrino Neto[2]

[1] Aluno de Iniciação Científica da Escola de Engenharia Mauá (EEM/CEUN-IMT);
[2] Professor da Escola de Engenharia Mauá (EEM/CEUN-IMT).

Resumo. *Neste trabalho desenvolveu-se um programa que pudesse ser utilizado na sala de aula como material didático. O assunto é a Análise Matricial de Estrutura, a dificuldade de se manipular matrizes grandes na mão abre espaço para programas computacionais. O MATLAB foi escolhido porque viabiliza de forma simples o entendimento da metodologia, assim como a manipulação da álgebra matricial. A partir de um exemplo mostraremos a metodologia e os resultados consistentes da aplicação.*

Introdução

Durante o curso de Teoria de Estruturas depara-se com estruturas que não podem ser resolvidas apenas com as equações de equilíbrio da estática, por exemplo as estruturas hiperestáticas possuem mais incógnitas do que equações de equilíbrio, sendo necessárias outras maneiras para obtê-las. Para se resolver as incógnitas da estrutura existem duas metodologias, o método dos esforços e dos deslocamentos, onde as incógnitas referem-se aos esforços, reativos e/ou solicitantes e os deslocamentos, respectivamente. Atualmente o método dos deslocamentos se impõe face a facilidade de implementação computacional, destacando-se a Análise Matricial de Estruturas, aplicada às estruturas reticuladas constituídas por barras, sua aplicação é abrangente incluindo diversas estruturas como vigas, treliças, pórticos e grelhas. Neste caso, a incógnita básica do problema são os deslocamentos dos nós. O estudo prévio que existe sobre a teoria das barras nos permite calcular outras informações como os esforços das extremidades, esforços internos solicitantes e deformações ao longo da barra. O estudo das teorias das barras ligada a Análise Matricial de Estruturas já se encontram desenvolvidas há muito tempo, porém a manipulação de grandes dados sem o advento do computador tornava os cálculos inviáveis. Assim se utilizou no passado de outros métodos de análise como o método da equação dos três momentos, método de Cross e que apesar de serem simplificados ainda exigiam grandes cálculos. Estes modelos não devem ser rejeitados e esquecidos ainda constituem um papel importante na formação de um engenheiro de estruturas, pois exige uma capacidade de compreensão do comportamento das estruturas, logo ambos os métodos têm a sua importância. A Análise Matricial se destaca pela sua facilidade de implementação computacional, a larga difusão de computadores no dia-a-dia nos induz a criar cada vez mais métodos computacionais e enquanto modelos clássicos buscam simplificar o problema, a análise matricial é condicionada a maximizar o número de incógnitas.

O software escolhido para desenvolver o estudo foi o Matlab (*Matrix Laboratory*) que possui uma biblioteca ampla de módulos para processamento de dados, uma coleção de ferramentas gráficas e uma interface gráfica que será utilizada no programa desenvolvido. No entanto, sua maior contribuição está na possibilidade de criação, manipulação e visualização de matrizes e vetores assim sua utilização é conveniente para a resolução da AME (Análise Matricial de Estruturas) que é formado por matrizes e vetores.

Escolhido o software e dominado a teoria, pensou-se em como tornar a resolução didática para alunos, assim apesar de haver uma automatização no processo de solução do problema conseguiríamos não só revelar o resultado final, como também visualizar o passo a passo. A ideia foi utilizar uma interface gráfica e mostrar partes da resolução do problema assim o aluno não necessita saber tudo que está nos códigos, mas entende o raciocínio. Existem outras ferramentas que contribuem para essa automação do processo da Análise Matricial, como planilhas no Excel que serviram de comparação. Outra ferramenta mais conhecida que trabalha com Análise Matricial é o Ftool, software que também será utilizado para se comparar resultados.

Material e Métodos

O material utilizado principalmente foi a apostila de Análise Matricial de Estrutura do professor Edgard S. Almeida Neto e Henrique de Britto (2016), este contém uma explicação sobre a diferença entre a resolução de estruturas pelo método dos esforços e dos deslocamentos, além disso, apresentam exemplos resolvidos de estruturas como vigas contínuas, treliças e pórticos.

No MATLAB utilizou-se a ferramenta GUI (*Graphical User Interface*) para criar uma interface gráfica que permitisse a entrada de dados e visualização das respostas. Foram criado dois programas: um para treliças e outra para pórticos ambos planos. O primeiro que apresentaremos é o de treliças. A figura 1 é a interface criada para o aplicativo.

Figura 1 - Interface gráfica

A figura 2 apresenta parte em que criaremos a estrutura com o número de barras, graus de liberdade do nós e graus de liberdade livres dos nós.

Figura 2 - Criação da estrutura

Na figura 3 entraremos com os dados de cada barra de sua estrutura, estes são comprimento, área da seção transversal, módulo de elasticidade, ângulo formado com a horizontal além dos graus de liberdade. Deve se tomar cuidado na hora de númerar os graus de liberdade de uma estrutura, para o método escolhido os graus de liberdade livres devem ser númerados primeiro.

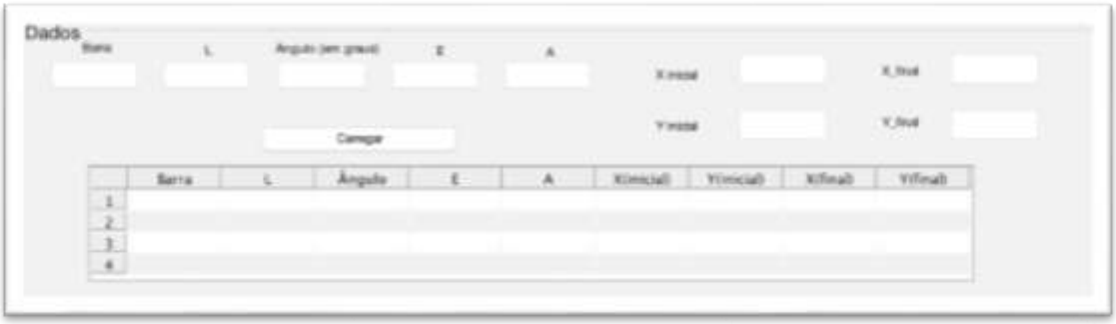

Figura 3- Entrada de dados

No programa para o cálculo da treliça a matriz de rigidez da barra no sistema local que é a matriz $[\bar{k}]_{4x4}$ a sua ordem é 4 x 4 porque cada nó apresenta dois graus de liberdade e são 2 nós em cada barra. A matriz de rotação $[T]$ é a matriz transforma a matriz do sistema local para o global.

$$[\bar{k}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4x4}$$

Equação 1

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & sen\alpha & 0 & 0 \\ -sen\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & sen\alpha \\ 0 & 0 & -sen\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}_{4x4}$$

Equação 2

O espalhamento das matrizes é uma etapa importante da análise que consiste em distribuir a contribuição de cada barra quanto a sua rigidez na matriz da estrutura. A técnica utilizada é criar uma matriz de suporte que chamamos de L, sua ordem será de 4 linhas, devido a dimensão da matriz de rigidez da barra de uma treliça ser 4x4, e o número de colunas varia de acordo com o número de graus de liberdade. Para completarmos a matriz utilizaremos 0 e 1, colocaremos 1 de acordo com a incidência de cada barra.

Exemplo:

Uma estrutura com 8 graus de liberdade e com a incidência da barra da figura 4, teremos uma matriz L do tipo 4x8 mostrado na figura 5.

$$\text{Incidência} = [1\ 2\ 5\ 4]$$

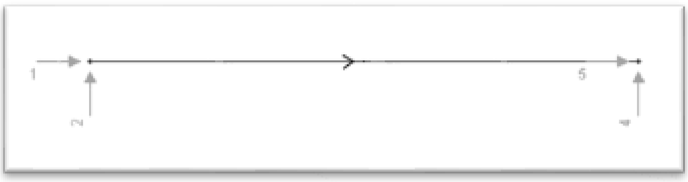

Figura 4 - Incidência da barra

$$
L = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
$$

Figura 5 - Matriz L

Na figura 6 tem se o código onde se utiliza a matriz L. A sua aplicação, para o espalhamento será feito multiplicando a matriz transposta L, pela rigidez da matriz e pela matriz L, assim teremos a contribuição da barra na estrutura. Além disso, temos na linha 312 do código a transformação da matriz da rigidez local para a global.

```
304
305 -   L =zeros(4,GL);
306
307 -   L(1,X_inicial) = 1;
308 -   L(2,Y_inicial) = 1;
309 -   L(3,X_final) = 1;
310 -   L(4,Y_final) = 1;
311
312 -   kbarraglobal = T'*kbarralocal*T;
313
314 -   Kestruturaglobal_1 = L'*kbarraglobal*L;
315
```

Figura 6 - Código da Matriz

Na figura 7 há a matriz de rigidez das barras e a da estrutura, onde podemos vizualizar a matriz de rigidez de todas as barras no sistema local e no global, além disso podemos observar o espalhamento das matrizes.

Figura 7- Matriz de Rigidez das Barras e da Estrutura

As figuras 8 e 9 são configuradas para introduzir dados do problema, possíveis deslocamentos impostos e a forças aplicadas nos nós.

Figura 8 - Vetor Deslocamento

Figura 9 - Vetor Força

Na figura 10 serão apresentados os resultados do nosso problema, os deslocamentos dos nós livres, as reações nos apoios e ainda se obtêm as forças locais em cada barra. Para se resolver o problema utilizamos a equação 3, onde discretizamos os esforços, a matriz de rigidez da estrutura e os deslocamentos em graus de liberdade livres e bloqueados. Resolvendo a multiplicação das matrizes poderemos calcular a incógnita do nosso problema o U_L que são os deslocamentos do nós livres , para posteriormente calcular o F_B que são as reações nos apoios.

Figura 10 - Resultados

$$\{F\} = [K] \cdot \{U\} \quad => \quad \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{F}_{L} \\ \underset{\sim}{F}_{B} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{-}{K}_{LL} & \underset{-}{K}_{LB} \\ \underset{-}{K}_{BL} & \underset{-}{K}_{BB} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{U}_{L} \\ \underset{\sim}{U}_{B} \end{Bmatrix}$$

Equação 3

$$F_L = K_{LL}\, x\, U_L => U_L = K_{LL}^{-1}\, x\, F_L$$
Equação 4

$$F_B = K_{BL}\, x\, U_L$$
Equação 5

Para o cálculo dos esforços nas barras, fazemos o processo inverso. Onde precisamos transformar os resultados da estrutura para as barras. Para isso no código utilizamos matrizes 3D que armazenaram os graus de liberdade de cada barra para facilitar. Calcular os esforços no sistema local facilita a construção dos diagramas de esforços solicitantes.

Resultados e Discussão

Demonstraremos o funcionamento do programa com um exemplo e compararemos os resultados com uma planilha Excel e com o ftool.

Exemplo: Para a treliça plana da figura 10, cuja discretização é apresentada na figura 11, determinar as reações de apoios e os deslocamentos dos nós livres.

Dados: $A_{tubos} = 7x10^{-4}\ m^2; E_{tubos} = 200\ GPa;$

$Barra\ 1: L_{AE} = 3{,}605\ m;\ \alpha_{AE} = 123{,}69°$
$Barra\ 2: L_{ED} = 2{,}828\ m;\ \alpha_{ED} = 45°$
$Barra\ 3: L_{CD} = 5\ m;\ \alpha_{CD} = 0°$
$Barra\ 4: L_{EC} = 3{,}605\ m;\ \alpha_{EC} = 146{,}31°$
$Barra\ 5: L_{BE} = 3{,}605\ m;\ \alpha_{BE} = 33.69°$
$Barra\ 6: L_{BC} = 4\ m;\ \alpha_{BC} = 90°$

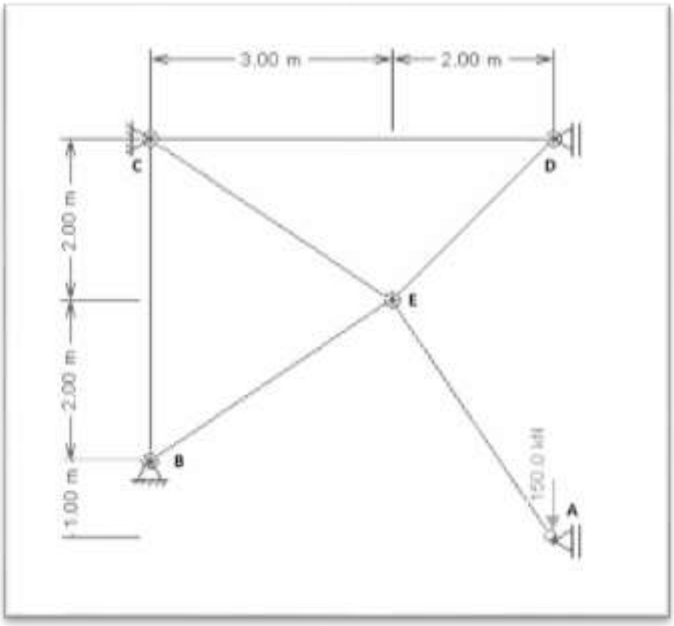

Figura 11 - Treliça Plana

Na figura 12 determinamos os graus de liberdade livres e bloqueados, em cada nó da treliça há dois graus de liberdade, sendo translação horizontal e vertical. A as numerações começam a partir dos graus de liberdade livres, depois os bloqueados. Além disso, é determinado a incidência de cada barra, e isto determinará o ângulo que cada uma das barras forma com o eixo horizontal.

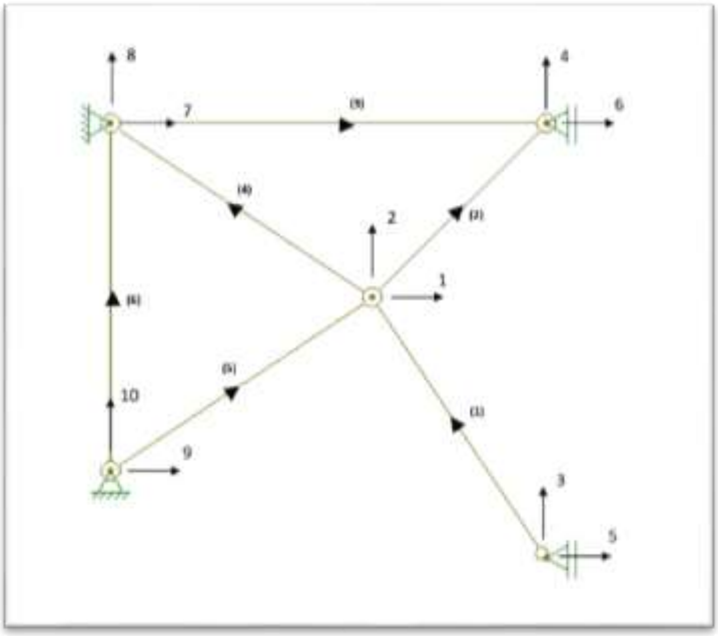

Figura 12 - Treliça com graus de liberdade e incidências

O passo seguinte é criar a estrutura no programa e introduzir as informações de cada barra. Na figura 13, carregamos todas as barras, e podemos ver a matriz de rigidez das barras e da estrutura. Introduzimos a única força externa atuante na barra e para posteriormente calcular as incógnitas.

Figura 13 - Programa completo com os dados do exemplo

Os resultados encontrados são comparados com a planilha de com o Ftool (figura 14) e a planilha de Excel (Figura 15).

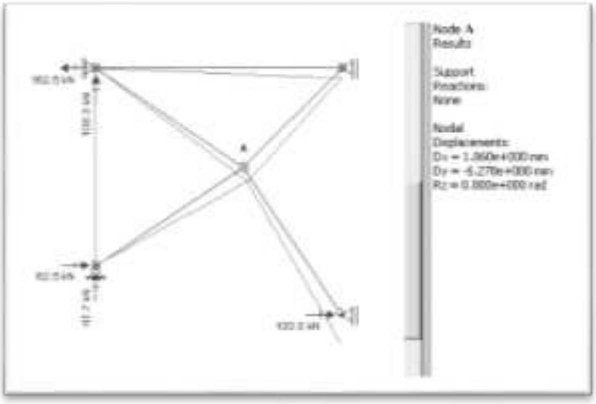

Figura 14 - Ftool - Deslocamento do nó A

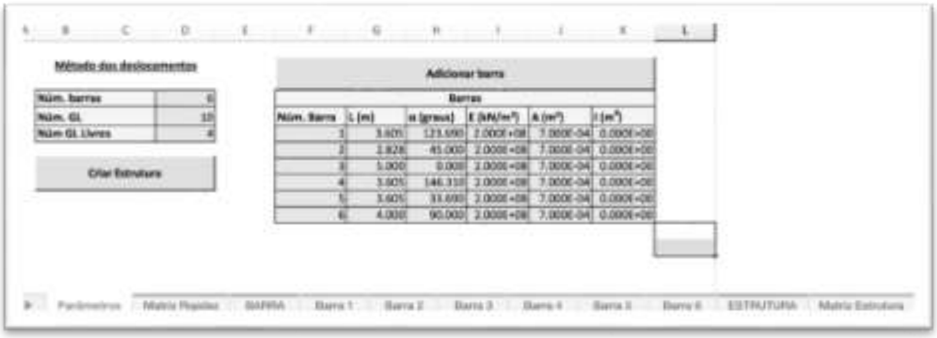

Figura 15 -Dados

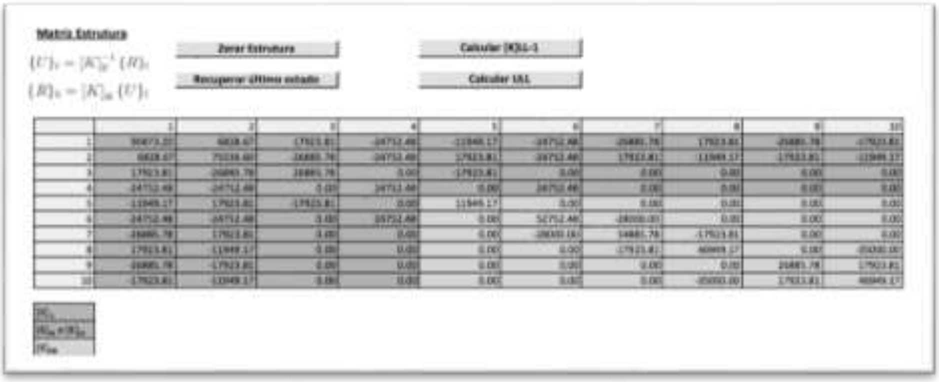

Figura 16 - Matriz de rigidez da estrutura

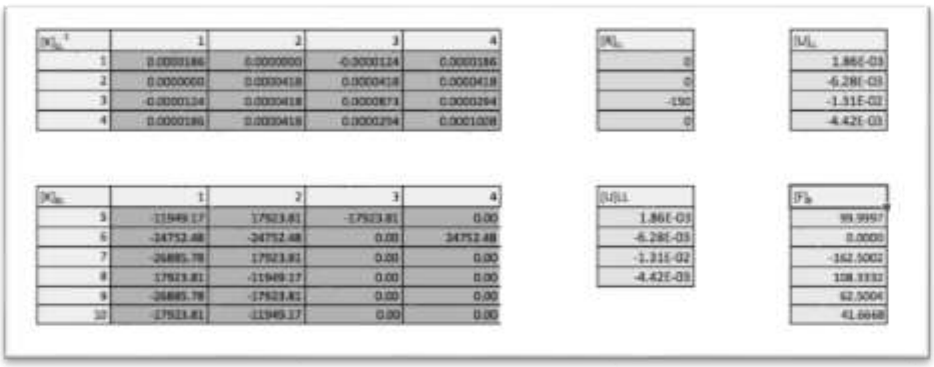

Figura 17 - Resultados

Percebe-se nas tabelas 1 e 2 que o Matlab e o Excel apresentam os mesmos resultados, enquanto que o Ftool, o erro acontece apenas na 3º e 4º casa decimal, resquícios de um aproximação ao introduzirmos os dados no MatLab e no Excel.

Tabela 1 - Deslocamentos

U (mm)	MatLab	Ftool	Excel
U_1	1.860	1.860	1.860
U_2	-6.277	-6.278	-6.277
U_3	-13.095	-13.100	-13.095
U_4	-4.417	-4.418	-4.417

Tabela 2 - Esforços

F (kN)	MatLab	Ftool	Excel
F_5	99.9997	100.0000	99.9997
F_6	0.0000	0.0000	0.0000
	-	-	-
F_7	162.5002	162.5000	162.5002
F_8	108.3332	108.3333	108.3332
F_9	62.5004	62.5000	62.5004
F_{10}	41.6668	41.6667	41.6668

Demonstramos o uso do programa de treliças, na figura 17 podemos ver o programa de pórticos, o seu código é similar, existem algumas alterações como a matriz de rigidez das barras, como temos 3 graus de liberdade em cada nós, sua matriz será de 6x6 como na equação 6, além da matriz de rotação que também se altera como está descrito na equação 7.

Figure 18 - Programa de Pórtico

$$[\bar{k}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} & 0 & \frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} \end{bmatrix}$$

Equação 6 - Matriz de Rigidez do Pórtico

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Equação 7 - Matriz de Rotação do Pórtico

Conclusão

Os programas desenvolvidos com o MATLAB são muito práticos. O ftool é um programa prática, com uma interface gráfica muito simples e eficiente, porém não conseguimos visualizar a metodologia implementada no programa, a contribuição da rigidez de cada barra na estrutura. Enquanto o Excel é sugerido por ser um programa conhecido e utilizado no dia-a-dia, mas quando pensamos em cálculos estruturais grandes, a necessidade de se fazer espelhamento da estrutura célula por célula torna a planilha lenta, assim o programa do MATLAB se destaca. O programa em si, ainda pode ser complementado, onde mais etapas do processo podem ser exibidas para o usuário quando estiver utilizando a interface gráfica.

Referências Bibliográficas

Neto, E.S.A.; Costa, H.B. (2016) Análise Matricial de Estruturas - 1D. Escola Politécnica da USP.

Neto, E.S.A.; Costa, H.B. (2016) Análise Matricial de Estruturas - Exemplos. Escola Politécnica da USP.

Mazzilli, C.E.N.; André, J.C.; Bucalem, M.; Cifú, S.; Schwark, M.P. Apostila de PEF-129 – Mecânica das Estruturas I. Escola Politécnica da USP.

Martha, L. F.; Análise matricial de estruturas aplicadas a modelos lineares. Puc-Rio.

Kattan, P. MATLAB Guide to Finite Element – An Interactive Approach. 2nd edition. New York, Springer.